Handig met getallen 4

Rekenboek gecijferdheid voor de pabo

Meetkunde - 4. Transformeren

Als je dichterbij komt, zie je steeds minder van de Peperbus (Zwolle). Hoe kan dat?

Auteur: Ruud Houweling

ISBN: 978 94 90681 197

Voldoet aan de Kennisbasis Wiskund en bereidt voor op de LKT Wiskunde

CANTAL
UITGEVERIJ

Handig met getallen 4 (HMG4)

Domein 4: Meetkunde - 4. Transformeren

HMG4 voldoet aan de Kennisbasis Wiskunde 2018 en bereidt voor op de LKT Wiskunde

Auteur: Ruud Houweling
Adviezen: Suzanna Hoeksma

Redactie: Uitgeverij Cantal

Vormgeving: Studio Van Elten, 's-Hertogenbosch

Drukwerk: Weprint4all, 's-Hertogenbosch

ISBN 978 94 90681 197
1e druk, 1e oplage (2021)

Bij deze uitgave hoort een website
met o.a. de antwoorden op de toetsen:
www.handigmetgetallen.nl

CANTAL UITGEVERIJ

Inhoudsopgave

4. Transformeren

Transformeren betekent letterlijk ‘omvormen’. Met de term ‘transformatie’ beschrijf je meetkundige activiteiten als:

- spiegeling in een lijn of punt;
- translatie (verschuiving);
- rotatie of draaiing.

4.1 Transformatie en symmetrie

Met de figuren die je nu kent, kun je bewerkingen (operaties) uitvoeren. Ook die bewerkingen beschrijft de meetkunde.

4.1.1 Transformatie w.o. spiegelen

Voorbeeld 1 Meetkunde beschrijft de werkelijkheid
De meetkunde beschrijft eigenlijk alledaagse bewerkingen met figuren. Veel bewerkingen in de meetkunde hebben parallellen met de werkelijkheid van alledag.
Opdracht:
Probeer een antwoord op deze vragen te formuleren.

1. Wat is de overeenkomst tussen een noodstop met geblokkeerde remmen en een sliding bij voetbal?
2. Wat is de overeenkomst tussen een windmeter, een draaimolen, een pirouette van een danseres, een draaideur en een secondewijzer van een horloge?
3. Wat is de overeenkomst tussen twee voeten naast elkaar, een bergmeer bij windstil weer en een VW logo?
4. Wat is de overeenkomst tussen het kijken in een glimmende lepel en het kijken naar een glimmend (fiets)kogeltje.
5. Verzin zelf een aantal voorbeelden bij deze vragen.

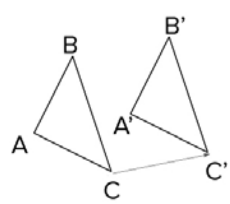
Toelichting:
Je hebt waarschijnlijk ontdekt dat de vragen steeds over een ander principe gaan. Je herkent in de eerste vraag een verschuiving als beweging, in het tweede vraag een draaiing als beweging en in de derde en vierde vraag (misschien de moeilijkste) spiegeling als activiteit. Zoals gezegd, eigenlijk gaat het om gewone, dagelijks voorkomende gebeurtenissen.
Als je dat begrijpt, ben je dicht bij begrip van het meetkundige begrip transformatie, dat betekent ‘verplaatsing’. Je kunt de richting van de verplaatsing ook met een meetkundige aanduiden:

- Bij vraag 1 is er sprake van een verschuiving, een translatie.
- Vraag 2 gaat over een draaiing, een rotatie.
- Bij vraag nummer 3 gaat het over een spiegeling.
- Vraag 4 betreft een spiegeling in een punt, een puntspiegeling.

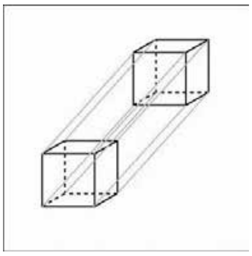
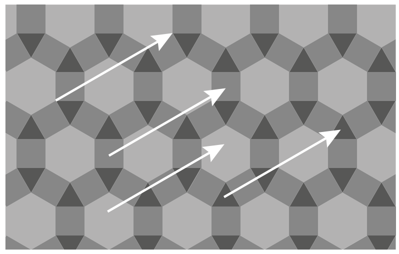
De verzamelnaam voor de translatie, de rotatie en de spiegelingen is: transformatie.

Voorbeeld 2 Translatie
Je kunt de bewerking translatie bij elke figuur toepassen.
In deze verschillende tekeningen gaat het steeds om twee kenmerken:

1. De afstand waarover je de figuur verschuift.
2. De richting waarin je schuift.



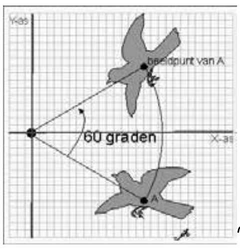
In de eerste tekening is driehoek ABC getransleerd over lijnstuk CC’. Met je liniaal kun je controleren of de afstanden AA’ en BB’ even lang zijn en of de richting dezelfde is als die van CC’.
Op deze manier kun je allerlei figuren verschuiven en kunnen er patronen ontstaan. Kijk naar de afbeeldingen. Het patroon ontstaat hier door de continue translatie van de oorspronkelijke figuur.

Voorbeeld 3 Rotatie

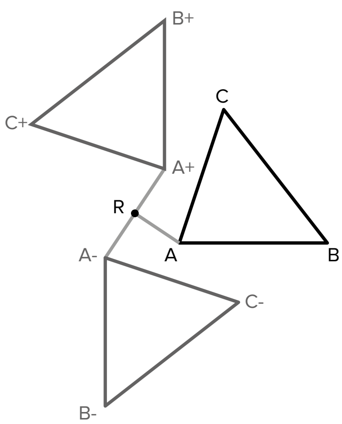
Een rotatie wordt bepaald door twee dingen:

1. een punt waar je om roteert;
2. de hoek waarover je roteert.



Dit plaatje van de geroteerde vogel is geroteerd om de oorsprong O (=het snijpunt van de x-as en de y-as) en over een hoek van 60 graden.

Je kunt ook 60 graden de andere kant opdraaien, dus met de klok mee. De afspraak is dat een rotatiehoek positief is als de rotatie tegen de wijzers van de klok in gaat. Gaat de rotatie met de wijzers van de klok mee, dan is de hoek negatief.



Bij dit figuur met de driehoeken, is driehoek ABC:

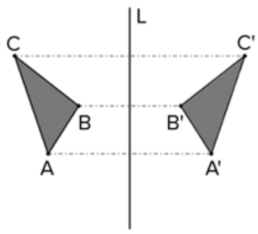
- geroteerd om punt R over een hoek van -90 graden om driehoek A-B-C- te krijgen;
- geroteerd over een hoek van 90 graden om driehoek A+B+C+ te krijgen.

Ook kun je rotaties herkennen in patronen. In de derde afbeelding is geroteerd om een bepaald punt over een hoek van 120 graden. Zie je welk punt? Er zijn nog meer mogelijkheden. Zie jij ze?

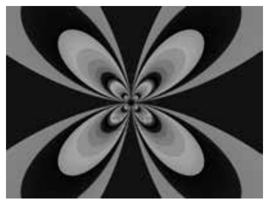
Voorbeeld 4 Spiegeling.
Deze transformatie is goed te vergelijken met een echte spiegel. Je spiegelt namelijk in een lijn. Bij de enkele driehoek ABC (figuur a) is dat bijvoorbeeld lijn L. Je tekent:

- loodrecht op de lijn;
- de afstand aan de andere kant is gelijk aan die van de ene kant.

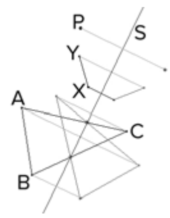
Bij de figuur c is dat goed te zien bij spiegeling is de spiegellijn lijn s. Figuur b is ook het resultaat van een spiegeling. Het resultaat is een symmetrisch figuur met maar liefst 4 assen. Zie jj waar ze kunnen liggen?



Figuur a

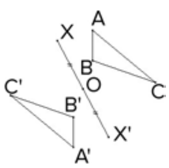


Figuur b

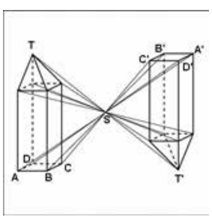


Figuur c

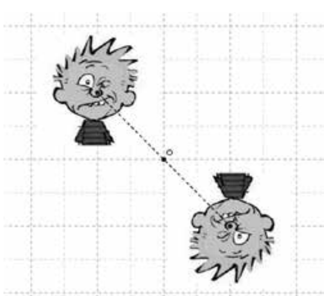
Voorbeeld 5 Spiegelen in een punt.



Een puntspiegeling lijkt heel erg op een spiegeling in een klei, bolvormig spiegeltje. Punt O heet 'centrum' waarin je spiegelt. Het spiegelbeeld van een punt ligt even ver aan de andere kant van het centrum.
Kijk naar de tekening: X'is het puntspiegelbeeld van X en driehoek A'B'C' het puntspiegelbeeld van de driehoek ABC.



In de tweede afbeelding is een driedimensionaal figuur gespiegeld in een punt S.



Aan deze voorbeelden kun je zien dat de oriëntatie wisselt: onder wordt boven, links wordt rechts enzovoorts.

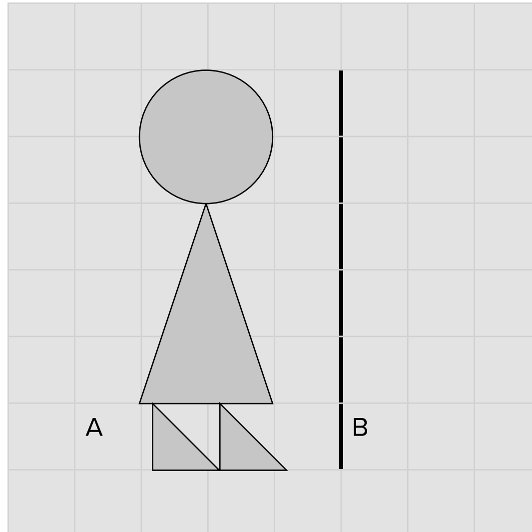
Deze bewerkingen oefen je in opgaven 1 tot en met 4.

▶ **Opgave 1** Eurospiegeling
Neem twee spiegels en een euromunt. Plaats de spiegel zo dat je achtereenvolgens 1, 2 en 3 euro's ziet. Maak op ruitjespapier van 1 cm x 1cm een schematische tekening van de posities van de spiegel en de euromunt.

▶ **Opgave 2** Spiegels en veelhoeken
Gebruik nog een keer de twee spiegels. Teken op ruitjespapier van 1 cm x 1cm een lijnstuk en met behulp van de spiegels verschillende vlakke figuren. Je kunt een vierkant maken, maar ook veelhoeken.

▶ **Opgave 3** Samen één
a. Teken op ruitjespapier van 1 cm x 1cm een driehoek en spiegel deze in een van de zijden.
b. Hoe heet de nieuwe figuur die gevormd is? Je hebt meer mogelijkheden.

▸ **Opgave 4** Draaien en Spiegelen
Gebruik ruitjespapier van 1 cm x 1cm.
a. Spiegel figuur A in de dikke lijn B.
b. Roteer lijn B over -90°. Neem als draaipunt het midden van het hoofd van figuur A.
c. Transleer het gespiegelde figuur A. Dat betekent alle punten 6 stapjes naar rechts en 1 stapje naar beneden.



4.1.2 Symmetrie
Bij elk van deze vier transformaties kan het zijn dat je geen effect ziet, bijvoorbeeld als je een vierkant spiegelt in de lijn door twee overstaande hoekpunten (de lijn waarop een van de diagonalen ligt). Dan krijg je namelijk hetzelfde vierkant als spiegelbeeld. In dat geval spreken we over symmetrie. Het vierkant is symmetrisch in de genoemde lijn.

Voorbeeld 6 Geen effect
Nog een aantal andere voorbeelden van symmetrie.

Spiegelen in een lijn
a. Teken op ruitjespapier van 1 cm x 1 cm een vierkant en spiegel dat vierkant in de lijn door de middens van twee overstaande zijden.

Roteren
b. Teken op ruitjespapier van 1 cm x 1 cm een vierkant en roteer het vierkant om het snijpunt van de diagonalen over een hoek van + 90° (of -270°). Bij een cirkel kun je dezelfde opdracht uitvoeren, maar dat is wel een beetje flauw.

Puntspiegelen
c. Teken op ruitjespapier van 1 cm x 1 cm een rechthoek en voer de puntspiegeling van de rechthoek uit in het snijpunt van de diagonalen.

Reflectie
In opdracht a tot en met c is het enige effect dat je misschien punten anders moest noemen, maar ook alleen als de figuur een naam had. Verder is geen effect. In die gevallen spreek je over symmetrie.
Conclusie:
- Een vierkant is (lijn)symmetrisch in de lijn door de middens van de overstaande zijden, die lijn heet dan symmetrieas van het vierkant. Elk vierkant heeft zelfs vier symmetrieassen.
- Een vierkant is rotatiesymmetrisch in het snijpunt van zijn diagonalen over 90°, maar ook over een aantal andere hoeken. Elke cirkel is rotatiesymmetrisch. Daarbij maakt de hoek niet uit, want elke hoek geeft dezelfde cirkel.
- De rechthoek is puntsymmetrisch in het snijpunt van zijn diagonalen. Dat punt noem je het middelpunt van de rechthoek. Het woord “middelpunt” bij een cirkel is treffend gekozen, want ook de cirkel is puntsymmetrisch in het middelpunt.

Bij een translatie spreek je niet snel van symmetrie. Het komt niet vaak voor dat een figuur na verschuiving precies dezelfde figuur oplevert. Toch is er een figuur waar dat wel bij lukt. Weet je welk? Inderdaad: een lijn die in de richting van de lijn getransleerd wordt.
Er is dus sprake van symmetrie als een figuur samenvalt met het beeld dat ontstaan na een transformatie. De figuur is dan symmetrisch in een lijn (symmetrieas), in een punt (middelpunt) of rotatiesymmetrisch over een bepaalde hoek.
▸ **Opgave 5** Zo symmetrisch als maar kan!
a. Noteer van de driehoeken (paragraaf 1.2) en de vierhoeken (paragraaf 1.3) welke er symmetrisch, puntsymmetrisch en/of rotatiesymmetrisch zijn. Je zult zien dat de verschillende vormen van

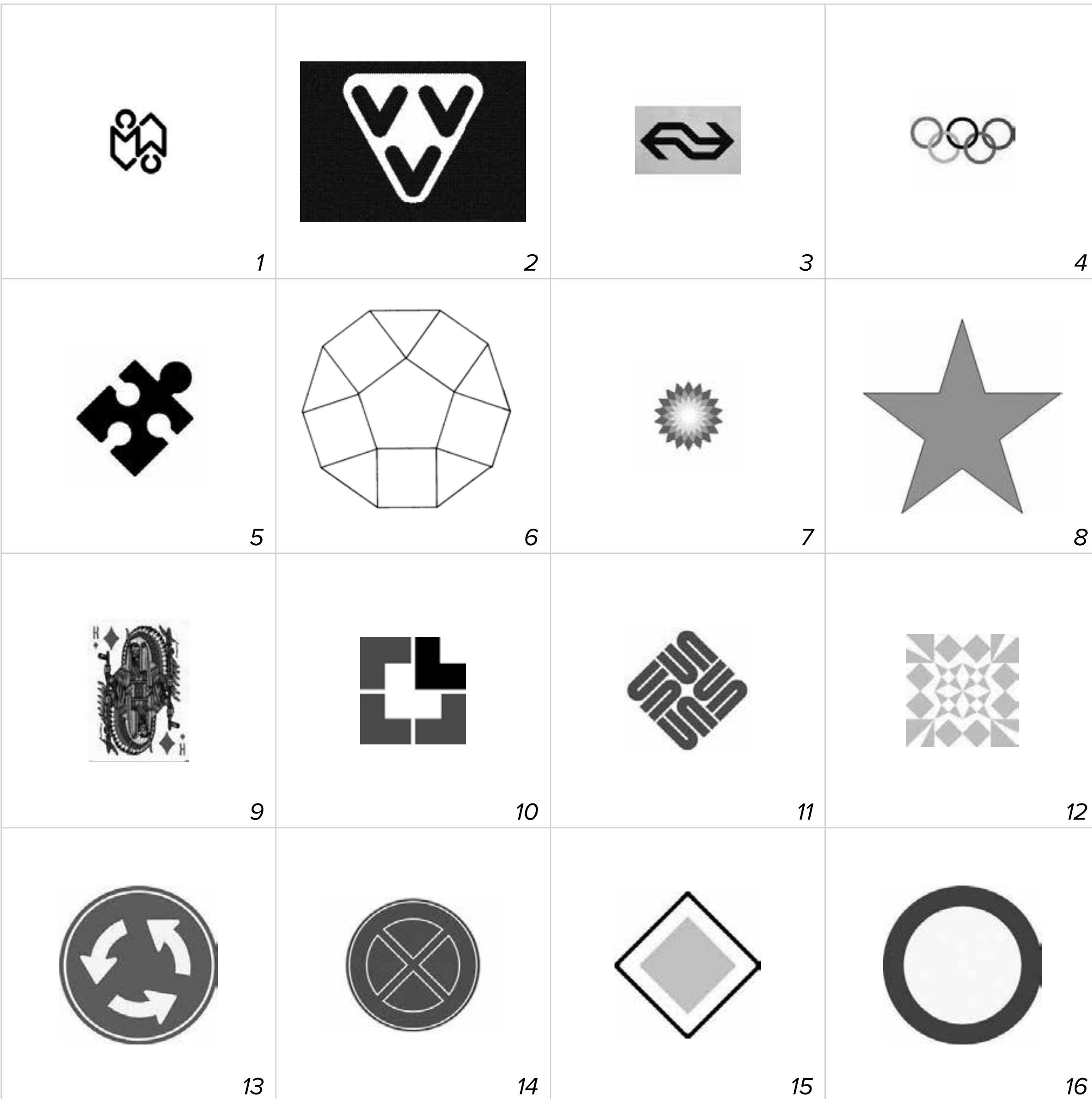
symmetrie in sommige figuren samenvallen. In een vierkant vind je bijvoorbeeld alle drie de vormen van symmetrie terug. Een vierkant:

- heeft 4 symmetrieassen;
- is rotatiesymmetrisch in zijn middelpunt (het snijpunt van de diagonalen) over 90°, 180° en 270°;
- is ook puntsymmetrisch in zijn middelpunt.

b. Wat kun je zeggen over rotatiesymmetrisch over 180 graden en puntsymmetrisch?

▸ **Opgave 6** Logo, logo

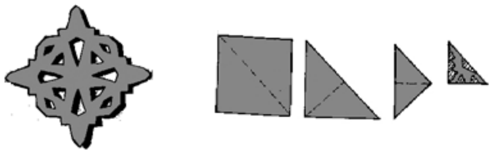
Veel logo's zijn symmetrisch. Er zijn logo's met draai-, lijn- of puntsymmetrie.



Beantwoord de vragen en licht je antwoord toe.

a. Welke van deze logo's zijn (lijn-)symmetrisch?
b. Welke van deze logo's zijn puntsymmetrisch?
c. Welke van deze logo's zijn rotatiesymmetrisch (draaisymmetrisch)?
d. Teken eventuele symmetrieassen in de logo's.
e. Bepaal door hoekmeting het logo met de kleinste draaihoek en noteer die.

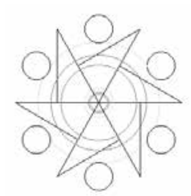
▶ **Opgave 7** Knutselkleedje



Een praktische invulling: maak een knutselkleedjes!
Beantwoord de vragen en licht je antwoord toe. Is er bij het knutselkleedje sprake van:

a. Draaisymmetrie? Zo ja, wat is de kleinste draaihoek?
b. Lijnsymmetrie? Zo ja, hoeveel symmetrielijnen kun je tekenen?
c. Puntsymmetrie?
d. Hoe vouw je het vouwblaadje om een kleinste draaihoek van 60 te krijgen? Probeer dit eens uit!

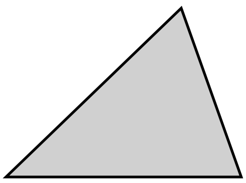
▶ **Opgave 8** Symmetrisch or not symmetrisch?



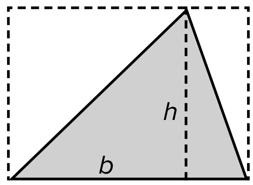
Deze figuur is samengesteld uit cirkels en driehoeken.
Van welke soort symmetrie is hier sprake?
Het zijn er meer dan één!

4.2 Omstructureren

Om de oppervlakte van een driehoek te bepalen, kun je een driehoek ‘omstructureren’ naar een rechthoek. Je tekent dan een rechthoek om de driehoek heen en lijst dus de driehoek als het ware in. Vervolgens teken je een loodlijn vanuit de punt van de driehoek naar de basis van de driehoek en verdeel de driehoek en de vierhoek in twee delen. Op die manier maak je twee rechthoeken: een grotere en een kleinere. Je ziet dan dat de twee delen van de driehoek ieder een helft zijn van een van de twee omlijstende rechthoeken. De oppervlakte van de driehoek is dus: de helft van de kleinere rechthoek + de helft van de grotere rechthoek. De oppervlakte van de driehoek is de helft van de omlijstende rechthoek. In formulevorm is dat: b x h : 2, waarbij ‘b’ staat voor de lengte en ‘h’ voor de hoogte van de driehoek.



Figuur a: een driehoek

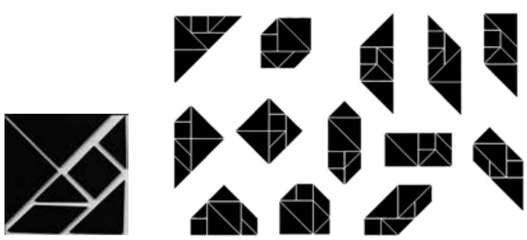


Figuur b: met rechthoeken

De term ‘omstructureren’ betekent:

- een figuur omvormen tot een ander figuur, bijvoorbeeld twee driehoeken samenvoegen tot een vierhoek;
- een figuur, bijvoorbeeld een veelhoek, verdelen in bekende delen als driehoeken en vierhoeken door de veelhoek in twee of meer stukken te knippen.

Bij het meten van oppervlakte van sommige tweedimensionale figuren is omstructureren een handig hulpmiddel. Je gebruikt dan vormen waar je eenvoudig de oppervlakte van kunt bepalen.
Neem de Tangrampuzzel als voorbeeld. Met het vierkant van de puzzel kun je allerlei nieuwe figuren maken. De oppervlakte van de figuren samen blijft die van het vierkant.

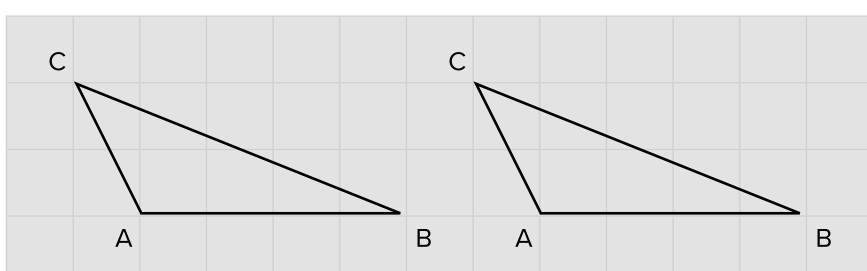


▶ **Opgave 1** Bereken de oppervlakte
De zijden van het vierkant zijn 8 cm lang. Bereken de oppervlakte van elk van de oorspronkelijke figuren van de tangram.

▶ **Opgave 2** Puzzelfiguren
Bepaal van enkele van de figuren van opgave 1 de oppervlakte.

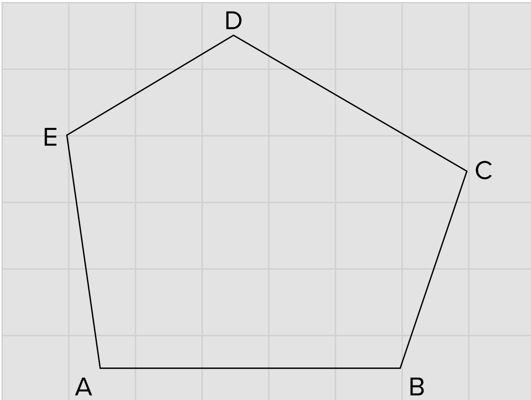
▶ **Opgave 3** Bepaal de oppervlakte
Van de driehoek ABC ken je deze afmetingen:

- AB = 5 cm;
- AC = 3 cm;
- ∟ A = 135t

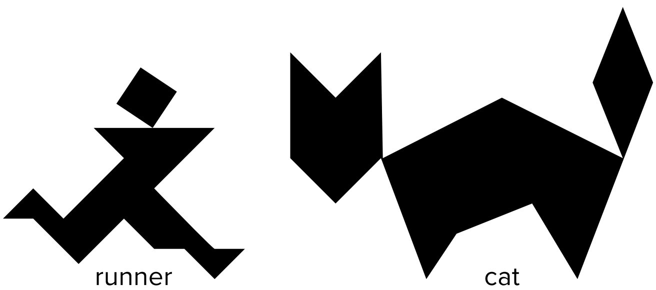


a. Teken op twee manieren een rechthoek om de driehoek.
b. Bepaal de oppervlakte van driehoek ABC. Noteer je berekening.

▶ **Opgave 4**:
Bepaal door meting de oppervlakte van deze vijfhoek ABCDE.



▶ **Opgave 5**:
Deze figuren zijn gemaakt van enkele Tangramstukjes.



a. Bepaal welke stukjes dat zijn. Gebruik de nummers in de afbeelding bij Opgave 1.
b. Bepaal de oppervlakte van de figuur aan de hand van de maten van de tangram bij Opgave 1.

4.3 Spiegelingen, structuren en patronen

Spiegels hebben van jongs af aan een magische aantrekkingskracht op kinderen. Heel jonge kinderen verwonderen zich over de effecten van een (of meer) spiegel(s). In de groepen 1 en 2 doen kleuters allerlei activiteiten met spiegels.

4.3.1 Spiegelen

Voorbeeld 1 Ervaren, verklaren en verbinden

Bijzonder, en niet alleen voor kleuters, is dat het spiegelbeeld van links dus eigenlijk rechts wordt, maar dat boven en onder niet veranderen. Tenzij je in een lepel kijkt, dan zie je jezelf opeens ondersteboven.

Opdracht 1:

Ga bij jezelf na of deze twee ervaringen kloppen, dus: links wordt rechts, maar boven blijft boven. Probeer te verklaren hoe dat kan. Gebruik daarbij ruitjespapier van 1 cm x 1 cm.

Opdracht 2:

Neem een euromunt en een spiegel. Met de spiegel kun je er twee munten van maken. Neem twee spiegels en maak er vier munten van.
Hoe moet je de spiegels houden om (steeds) meer munten te zien? Leg uit hoe dat kan.

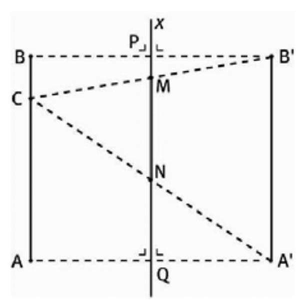
Opdracht 3:

Ga voor een spiegel staan, neem een niet watervaste stift en zet met een oog dicht een stip op de twee plekken waar jij je ogen ziet. Doe vervolgens je ‘dichte’ oog weer open. De stippen op de spiegel staan heel dicht bij elkaar, namelijk de helft van de werkelijke afstand tussen je ogen. Hoe kan dat?

Toelichting:

Heb je wel eens nagedacht over de plaats en grootte van een passpiegel in een modezaak? Je wilt immers je hele spiegelbeeld zien. Maar, hoe groot moet de spiegel tenminste zijn en hoe hoog moet hij aan de muur hangen?

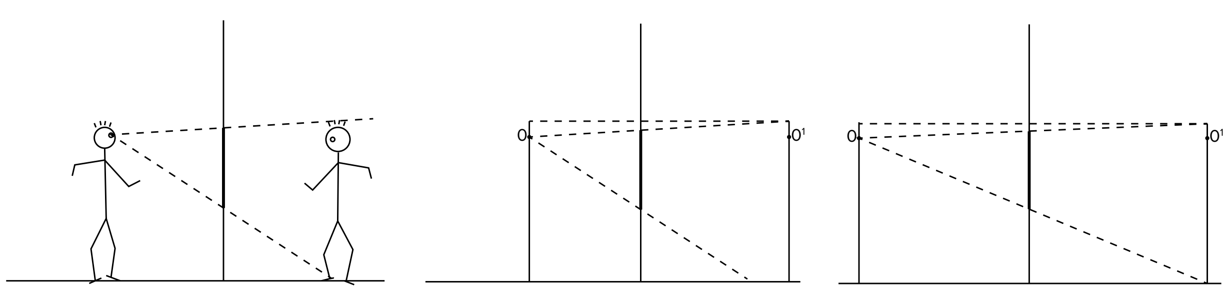
Probeer het je voor te stellen met behulp van deze tekening: jij staat voor deze spiegel. Benoem eerst de betekenis van de letters in de figuur. Bedenk dat de letters met een apostrof, zoals de A’, het spiegelbeeld zijn van de letters zonder een apostrof.



Ga vervolgens na hoe een passpiegel moet hangen om je spiegelbeeld volledig te kunnen zien en hoe hoog de spiegel dan minimaal moet zijn. Licht je bevindingen toe.

Toelichting:

Op deze afbeeldingen zie je het antwoord op deze twee vragen.



4.3.2 Structuren en patronen

Patronen kom je overal tegen. Je ziet ze buiten op straat in de structuren van de bestrating, of op het papier dat je gebruikt om een cadeautje in te pakken. Wandversieringen, bijvoorbeeld behang, bestaan vaak uit regelmatige patronen, uit regelmatige vlakvullingen.
Een regelmatige vlakvulling is een patroon dat ontstaat door een bepaalde figuur zó te herhalen dat het een heel vlak opvult zonder dat de vlakken elkaar overlappen. Zo'n figuur of tekening noem je een `tegel'. Een patroon kun je door een translatie in twee richtingen zó verplaatsten, dat het weer op zichzelf terecht komt. Het patroon kan ook nog over extra symmetrische eigenschappen beschikken, namelijk rotatiesymmetrie en spiegelingssymmetrie.

Tekenen van patronen

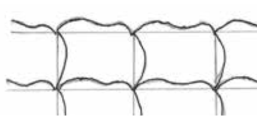
Patronen ontstaan door middel van transformaties, zoals translaties, rotaties en spiegelingen.
Een structuur krijg je door figuren op een bepaalde manier te ordenen, denk bijvoorbeeld aan de rechthoeken in de tegelstructuur van een betegeld plein.

Voorbeeld 2 Patronen en structuren
Je begint met een rechthoek en verschuift (transleert!) die over de langste zijde. Als dat steeds doet, ontstaat een hele rij van rechthoeken (figuur 1). Spiegel je die rij, dan krijg je een tweede rij. Doe je dat steeds opnieuw, dan heb je een patroon van rechthoeken (figuur 2).

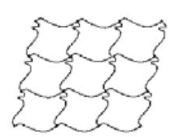
Figuur 1

Figuur 2

Als kunstwerk stelt dat nog niet zo veel voor: het is best saai. Maar, je kunt deze strategie ook creatief gebruiken, zoals de beroemde graficus en wiskundige Escher deed. Hij gebruikte deze strategie om tekeningen vol patronen te creëren. Hij vervormde eerst de zijden van de rechthoek en kwam zo tot een veel speelser figuur.
Jij bent Escher niet, maar zie je desondanks toch de horizontale verschuiving bij Figuur 1 en de spiegeling in de horizontale zijde bij Figuur 2? Je kunt de zijden van Figuur 2 een kromming geven zodat de tekening er wat speelser uitziet. Als je die transleert (zowel horizontaal als verticaal), krijg je een patroon zoals in Figuur 3. Een nog wat creatievere toepassing is te zien in figuur 4. Dit is het grondprincipe van de patroontekeningen van Escher.



Figuur 3

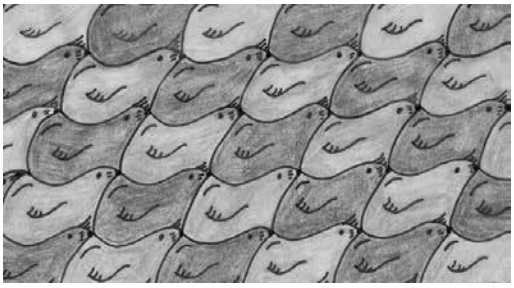


Figuur 4

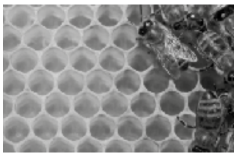
Als je deze manier volhoudt, ontstaat een heel blad met een vast patroon.

▶ **Opgave 1** Patronen tekenen
Teken een patroon van (a) driehoeken, (b) rechthoeken, (c) parallellogrammen en (d) zeshoeken. Noteer de letters bij de patronen. Gebruik ruitjespapier van 1 cm x 1 cm en plaats de hoekpunten van de figuren op de hoekpunten van de ruitjes.

▶ **Opgave 2**
Je ziet hier een vlakverdeling met beestjes. Beantwoord de vragen.
a. Wat is de grondfiguur (basisfiguur) van dit patroon?
b. Welke transformatie is hier (veelvuldig) toegepast?

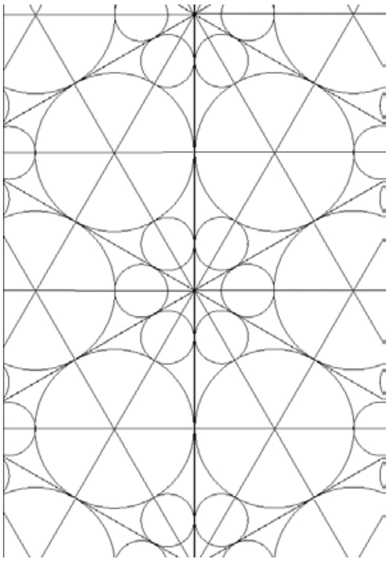


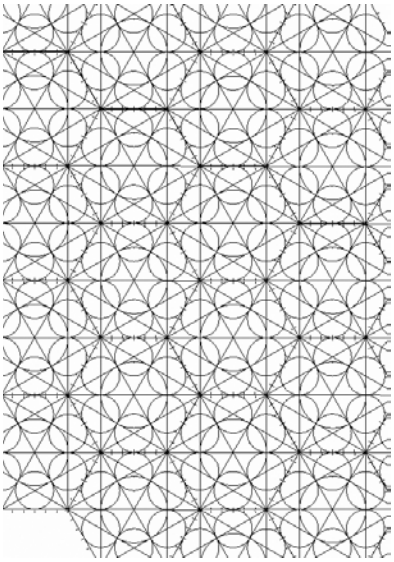
4.3.3 Herkennen van patronen
Een patroon kan ontstaan door translaties, door spiegelingen, door rotaties of door een combinatie van deze transformaties. Steeds maar doorgaan met een transformatie geeft een mooie vlakvulling. Dergelijke patronen hebben als grondvorm: vierkanten, rechthoeken, parallellogrammen, gelijkzijdige driehoeken, ruiten en zeshoeken. Die laatste vorm herken je misschien wel uit de kunstige constructie die bijen maken in een bijenraat.



▶ **Opgave 3** Grondvormen
Zoek, bijvoorbeeld op het internet, patronen en teken ze na. Zoek als grondvorm:
a. vierkant,
b. rechthoek,
c. parallellogram,
d. driehoek,
e. ruit,
f. zeshoek.

▶ **Opgave 4** Welke transformaties?


Patroon A


Patroon B

a. Welke vormen zijn in patroon A en B gebruikt?
b. Welke transformaties zijn in patroon A en B gebruikt om de vlakken te vullen?

Creatief met patronen
Patronen tekenen en inkleuren is een leuke activiteit voor de tekenles. Je kunt zelf een 3-D effect krijgen als je dat op de juiste wijze doet.

▶ **Opgave 5** 3D kubussen
Ga verder met hetzelfde patroon. Maak de 3D tekening van de kubussen af op ruitjespapier van 0,5 cm x 0,5 cm.