1.9 Vergelijken

1.9.1 Berekeningen met een onbekend getal

Deze paragraaf 1.9 hoort bij het rekenboek 'Handig met getallen 1B Hs. de Kempel - Bewerkingen'.

Je doet een spelletje in de bovenbouw:

> Neem allemaal een getal in je gedachten en schrijf het getal op een kladblaadje.
> Tel 6 op, vermenigvuldig met 5, tel 370 op, trek het begingetal eraf, deel door 4, trek het begingetal eraf, trek er 99 af, welk getal staat er nu op je blaadje?

De leerlingen hebben allemaal het getal 1 als uitkomst!! Een spelletje dat ze vaker willen spelen. Hoe kan het dat de leerlingen met verschillende getallen beginnen en toch dezelfde uitkomst krijgen?
Als je 'terug rekent' vanaf 1 zie je hoe het spelletje werkt.

Berekening van boven naar beneden lezen	Terug	Terug rekenen: van beneden naar boven lezen
startgetal		startgetal!
+ 6	- 6	6 + 1 x startgetal - 6 = startgetal
x 5	: 5	[30 + 5 x startgetal] : 5 = 6 + 1 x startgetal
+ 370	- 370	400 + 5 x startgetal - 370 = 30 + 5 x startgetal
- startgetal	+ startgetal	400 + 4 x startgetal + startgetal = 400 + 5 x startgetal
: 4	x 4	4 x [100 + startgetal] = 400 + 4 x startgetal
- startgetal	+ startgetal	100 + startgetal
- 99	+ 99	1 + 99 = 100
1		1

Je kunt de berekening ook in wiskundetaal noteren. Je schrijft voor het startgetal de letter A:

Heen	Berekening van boven naar beneden lezen	Terug	Terug rekenen van beneden naar boven lezen
startgetal	A	startgetal	A!
+ 6	A + 6	- 6	6 + 1 x A - 6 = A
x 5	5 x [A + 6] = 5A + 30	: 5	[30 + 5A] : 5 = 6 + 1 x A
+ 370	5A + 30 + 370 = 5A + 400	- 370	400 + 5A - 370 = 30 + 5A
- startgetal	5A + 400 - A = 4A + 400	+ startgetal	400 + 4A + A= 400 + 5A
: 4	[4A + 400] : 4 = A + 100	x 4	4 x [100 + A] = 400 + 4A
- startgetal	A + 100 - A = 100	+ startgetal	100 + A
- 99	100 - 99 = 1	+ 99	1 + 99 = 100
	1		1

Als je de berekening in pijlentaal noteert, zie je hoe je letterlijk terug kunt rekenen met de inverse bewerkingen. Onder de pijlen staat de 'heenweg' en boven de pijlen staat de 'terugweg'.

$$A \xrightarrow[+6]{-6} A + 6 \xrightarrow[\times 5]{:5} 5A + 30 \xrightarrow[+370]{-370} 5A + 400 \xrightarrow[-A]{+A} 4A + 400 \xrightarrow[:4]{\times 4} A + 100 \xrightarrow[-A]{+A} 100 \xrightarrow[-99]{+99} 1$$

Vraagstukjes waarbij je een 'onbekend getal' op moet zoeken in een berekening kun je oplossen door 'terug te rekenen'. Het onbekende getal wordt in de berekening voorgesteld door een letter, bijvoorbeeld een A. Je lost het vraagstuk op door te bereken welk getal A voorstelt.
Bij het ‘terug rekenen’ gebruik je de inverse bewerkingen. Optellen en aftrekken zijn elkaars inverse bewerking en vermenigvuldigen en delen zijn elkaars inverse bewerking.

Is er opgeteld, dan kun je terug rekenen door de getallen van elkaar af te trekken.	A + 12 = 20	A = 20 - 12 = 8
Is er afgetrokken, dan kun je terug rekenen door de getallen bij elkaar op te tellen.	A - 18 = 40	A = 40 + 18 = 58
Is er vermenigvuldigd, dan kun je terug rekenen door de getallen op elkaar te delen.	A x 8 =56	A = 56 : 8 = 7
Is er gedeeld, dan kun je terug rekenen door de getallen met elkaar te vermenigvuldigen.	A : 20 = 5	A = 5 x 20 = 100

De bewerkingen optellen en vermenigvuldigen zijn commutatief [wisseleigenschap], daardoor kun je de volgorde in de berekening omdraaien:
A + 12 = 20 heeft dezelfde oplossing als 12 + A = 20.
Als 12 + A = 20, dan is A = 20 - 12 = 8.
A x 8 = 56 heeft dezelfde oplossing als 8 x A = 56.
Als 8 x A = 56, dan is A = 56 : 8 = 7.
De bewerkingen aftrekken en delen zijn niet commutatief, daardoor kun je de volgorde in de berekeningen niet zo maar verwisselen.
A - 18 = 40 heeft niet dezelfde oplossing als 18 - A = 40.
Als 18 - A = 40, dan is A - 18 = -40 en A = -40 + 18 = -22.
Wil je berekenen welk getal A voorstelt, maak je er een optelsituatie van door te rekenen met de tegengestelde waardes van 18 - A en van 40. Je maakt gebruik van de eigenschap dat gelijke getallen ook gelijke tegengestelde getallen hebben.
A : 20 = 5 heeft niet dezelfde oplossing als 20 : A = 5.
Als 20 : A = 5, dan is 5 x A = 20 en A = 20 : 5 = 4.
Wil je berekenen welk getal A voorstelt, zet je de deling eerst om in een gelijkwaardige vermenigvuldiging en dan kun je A berekenen door verder terug te rekenen.

Voorbeeld 1 Hoeveel zakgeld krijgt Lisa?
Lisa heeft €5,-. Als zij nog 3 weken zakgeld spaart, heeft zij €17,-.
Hoeveel zakgeld krijgt Lisa per week?
Uitwerking:
In wiskundetaal: € 5,- + 3 x € .... = € 17,-, of: 5 + 3 x .... = 17, of: 5 + 3 x A = 17.
Lisa spaart in de drie weken € 17,- - € 5,- = € 12,-. Dat is per week € 12,- : 3 = € 4,-.
Lisa krijgt € 4,- zakgeld per week.

Voorbeeld 2 Welke getallen zijn het?
De som van twee getallen is 120.
Het grootste getal is 18 groter dan het kleinste getal.
Welke getallen zijn het?
Uitwerking:
Je noemt het kleinste getal A. Dan is het grootste getal 18 groter. Dat is A + 18.
De som van de getallen is A + A + 18 = 120.
Dan ga je 'terug rekenen':
A + A + 18 = 120
Dan is A + A = 120 - 18 = 102
A = 102 : 2 = 51
De getallen zijn: 51 en 51 + 18 = 69.

Voorbeeld 3.1 Reken uit
4 x A + 8 = 44.
Bereken 1 x A = A.
Uitwerking:
Je gaat eerst na welke bewerkingen zijn gebruikt en rekent dan terug.
Het getal A is vermenigvuldigd met 4 en vervolgens is er 8 bij opgeteld.
Terug rekenend:
4 x A = 44 - 8 = 36
A = 36 : 4 = 9
Ga na dat de oplossing correct is: 4 x 9 + 8 = 36 + 8 = 44.

Voorbeeld 3.2 Eenzelfde soort probleem
29 - 3 x A = 8.
Bereken 1 x A = A.
Uitwerking:
Het getal A is vermenigvuldigd met 3 en het product is afgetrokken van 29. Om eenvoudiger te kunnen rekenen maak je er een optelsituatie van door de tegengestelde waardes te vergelijken.
Je 'rekent terug':
-29 + 3 x A = -8, of 3 x A - 29 = -8
Dan is 3 x A = -8 + 29 = 21
A = 21 : 3 = 7
Ga na dat de oplossing correct is, want: 29 - 3 x 7 = 29 - 21 = 8.

Voorbeeld 3.3 Drie keer is ....
72 : [A + 2] = 4.
Bereken 1 x A = A.
Uitwerking:
Bij het getal A is 2 opgeteld en vervolgens is de som op 72 gedeeld. Om eenvoudiger te kunnen rekenen maak je er een vermenigvuldiging van.
Dan ga je terug rekenen:
4 x [A + 2] = 72
A + 2 = 72 : 4 = 18
A = 18 - 2 = 16
Ga na dat de oplossing correct is, want: 4 x [16 + 2] = 4 x 18 = 72.

Voorbeeld 3.4 Nog ééntje dan!
[2 x A - 10] : 5 = 30.
Bereken 1 x A = A.
Uitwerking:

Het getal A is met 2 vermenigvuldigd, het product is met 10 verminderd en het verschil is door 5 gedeeld.

Je rekent terug:

2 x A - 10 = 30 x 5 = 150
2 x A = 150 + 10 = 160
A = 160 : 2 = 80

Ga na dat de oplossing correct is, want: [2 x 80 - 10] : 5 = [160 - 10]: 5 = 150 : 5 = 30.

▶ **Opgave 1** Hoe groot is A?
Bereken het getal A.

1a.	A - 27 = 40	1b.	6 x A = 84	1c.	76 : A = 4
1d.	3 x A + 13 = 28	1e.	5 x A - 17 = 43	1f.	24 : [4 + A] = 2
1g.	40 - 7 x A = 19	1h.	[A - 11] : 9 = 12	1i.	4 x A - 15 = 73
1j.	35 + 8 x A = 59	1k.	36 - [5 x A - 22] = -12	1l.	60 : [9 x A - 12] = 4

Voorbeeld 4 Eenvoudiger maken - aftrekken
Hoe groot is A als 5 x A - 12 = 2 x A + 15?
Uitwerking:

Als er twee berekeningen aan elkaar gelijkgesteld worden, zo als in 5 x A - 12 = 2 x A + 15, moet je het getal A bepalen zodat 5 x A - 12 dezelfde uitkomst geeft als 2 x A + 15.

Je rekent terug naar 1 x A = ...

5 x A - 12 = 2 x A + 15

Maak de vergelijking eenvoudiger door aan beide kanten van het = teken het getal '2 x A' af te trekken:

5 x A - 2 x A -12 = 2 x A - 2 x A + 15
3 x A - 12 = 15

Je rekent verder terug:

3 x A = 15 + 12 = 27
1 x A = 27 : 3 = 9

Ga na dat de oplossing correct is, want: 5 x A - 12 = 5 x 9 - 12 = 45 - 12 = 33 en 2 x A + 15 = 2 x 9 + 15 = 18 + 15 = 33

Voorbeeld 5 Eenvoudiger maken - Optellen
Bereken 1 x A = A als 7 x A - 29 = 59 - 4 x A
Uitwerking:

Reken terug naar 1 x A = ...
7 x A - 29 = 59 - 4 x A

Maak de vergelijking eenvoudiger door aan beide kanten van het = teken het getal '4 x A' op te tellen:

7 x A + 4 x A - 29 = 59 - 4 x A + 4 x A
11 x A - 29 = 59

Je gaat verder met terug rekenen:

11 x A = 59 + 29 = 88
1 x A = 88 : 11 = 8.

Ga na dat de oplossing correct is, want: 7 x A - 29 = 7 x 8 - 29 = 56 - 29 = 27 en 59 - 4 x A = 59 - 4 x 8 = 59 - 32 = 27.

Voorbeeld 6 Eenvoudiger maken - Vermenigvuldigen
3 x [2 x A - 12] = 2 x A
Bereken A.
Uitwerking:

Je schrijft de vergelijking eenvoudiger door de termen tussen de haakjes beide met 3 te vermenigvuldigen:

3 x 2 x A - 3 x 12 = 2 x A
6 x A - 36 = 2 x A

Je maakt de vergelijking eenvoudiger door aan beide kanten van het = teken het getal ‘2 x A’ af te trekken:

6 x A - 2 x A - 36 = 2 x A - 2 x A
4 x A - 36 = 0

Dan reken je verder terug:

4 x A = 0 + 36 = 36
1 x A = 36 : 4 = 9

Ga na dat de oplossing correct is, want: 3 x [2 x A - 12] = 3 x [2 x 9 - 12] = 3 x [18 - 12] = 3 x 6 = 18 en 2 x A = 2 x 9 = 18.
Let op: In plaats van 1 x A of 5 x A is het gebruikelijk om A of 5A te schrijven.
In het vervolg van deze paragraaf wordt deze korte schrijfwijze gebruikt.

▶ **Opgave 2** Reken uit
Bereken het getal A.

2a. 8A + 12 = 5A + 33	2b. 6A - 8 = 2A + 12
2c. 7A - 21 = 5A - 1	2d. 5A + 6 = 3A - 2
2e. 12 - 3A = 45	2f. 18 - 2A = 5A - 17
2g. 24 : 3A = 4	2h. 5 x [3A + 4] = 40 - 5A
2i. [2A + 16] : A = 10	2j. 6 x[3A - 5] = 70 - 4 x [3A + 10]

Voorbeeld 7 Celsius en Fahrenheit
De aanpak van het 'terug rekenen' kun je ook gebruiken bij het omrekenen van formules.
Het verband tussen de temperatuur in graden Celsius en in graden Fahrenheit is weergegeven in de formule: C x 9 : 5 + 32 = F. In deze formule is het aantal graden Fahrenheit uitgedrukt in het aantal graden Celsius. Je kunt de formule omrekenen en het aantal graden Celsius uitdrukken in het aantal graden Fahrenheit:

C x 9 : 5 + 32 = F

Je trekt aan beide kanten van het = teken 32 af,

C x 9 : 5 + 32 - 32 = F - 32
C x 9 : 5 = F - 32

Je vermenigvuldigt aan beide kanten van het = teken met 5 en schrijft F - 32 tussen haakjes zodat beide termen met 5 vermenigvuldigd worden:

C x 9 : 5 x 5 = [F - 32] x 5
C x 9 = [F – 32] x 5

Je deelt aan beide kanten van het = teken door 9:

C x 9 : 9 = [F - 32] x 5 : 9
C = [F - 32] x 5 : 9

▶ **Opgave 3** De weg, de snelheid en de tijd
In de formule s = v x t wordt de afgelegde afstand s uitgedrukt in de snelheid v en de tijd t.

a. Sarah fietst 12 minuten met een gemiddelde snelheid van 15 kilometer per uur. Bereken de gefietste afstand met de formule s = v x t.
b. Druk de snelheid v uit in de afgelegde afstand en de tijd met behulp van de formule s = v x t.
c. Druk de tijd t uit in de afgelegde afstand en de snelheid met behulp van de formule s = v x t.

▶ Opgave 4 Body Mass Index

Je berekent de 'Body Mass Index' (BMI) van een persoon met de formule:

BMI = G : [L x L] of BMI = G : L^2

De 'G' staat voor het gewicht in kilogrammen en 'L' voor de lengte in meters.

a. John is 1,80 meter lang en weegt 85 kilogram. Bereken de BMI van John. Rond de BMI af op een geheel getal.

b. Druk het gewicht G uit in de BMI en de lengte L met behulp van de formule BMI = G : [L x L].

c. Druk de lengte L uit in de BMI en het gewicht G met behulp van de formule BMI = G : [L x L]. Bedenk dat de inverse bewerking van machtsverheffen worteltrekken is.

▶ Opgave 5 Oppervlakte en roosterpunten

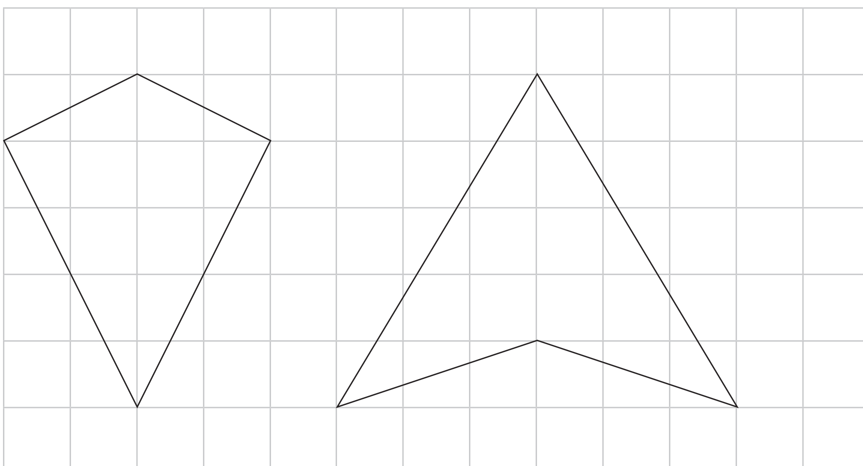
Met de 'formule van Pick' bereken je de oppervlakte van een meetkundig figuur op roosterpapier met vierkanten, waarbij de hoekpunten van het figuur op de punten van de roosters liggen.

De formule van Pick:

A = i + 0,5 o – 1,

waarbij A de oppervlakte van het figuur is, gemeten in roostervierkantjes; i het aantal inwendige roosterpunten is en o het aantal roosterpunten op de omtrek van het figuur is.

De oppervlakte van deze vlieger is: A = 8 + 0,5 x 6 - 1 = 8 + 3 - 1 = 10 ruitjes.



a. Bereken de oppervlakte van de pijlpuntvlieger met behulp van de formule van Pick.

b. Druk het aantal inwendige roosterpunten i uit in de oppervlakte A en het aantal roosterpunten op de omtrek o met behulp van de formule A = i + 0,5 o - 1.

c. Druk het aantal roosterpunten op de omtrek o uit in de oppervlakte A en het aantal inwendige roosterpunten i met behulp van de formule A = i + 0,5 o - 1.

▶ Opgave 6 Hartslag

De maximaal bereikbare hartslag bij volwassenen is afhankelijk van de leeftijd. Met de 'formule van Tanaka' kun je je maximaal bereikbare hartslag ongeveer uit rekenen.

Formule van Tanaka:

HFmax = 208 - 0,7 x L,

waarin HFmax de maximaal bereikbare hartslag is in slagen per minuut en L de leeftijd is.

a. De maximaal bereikbare hartslag van Boris is 180 slagen per minuut. Bereken Boris zijn leeftijd.

b. Druk in de formule van Tanaka de leeftijd L uit in de maximaal bereikbare hartslag HFmax.

1.9.2 Redeneren met vergelijkingen – de 'kaartverkoop' problemen

Sommige wiskundige problemen lijken door de context waarin het probleem gepresenteerd wordt heel verschillend, maar kunnen toch dezelfde oplossingsstructuur hebben. Bijvoorbeeld het redeneren met vergelijkingen die je kunt oplossen door 'één van de twee variabelen te maximaliseren'. De context van het 'kaartverkoop probleem' is hier een voorbeeld van.

Voorbeeld 8 Kaartjes

Voor een theatervoorstelling worden kinderkaartjes verkocht voor € 5,- en kaartjes voor volwassenen voor € 8,-. Er worden 500 kaartjes verkocht voor in totaal €2.860,-.

Oplossing:

De variabelen in het vraagstuk zijn:

- het aantal kinderkaartjes;
- het aantal kaartjes voor volwassenen.

Je kunt het vraagstuk oplossen door te stellen dat er x kinderkaarten en y kaarten voor volwassenen verkocht zijn en vervolgens op formeel niveau te rekenen met twee vergelijkingen met twee onbekenden. Je kunt het vraagstuk ook oplossen door te redeneren in de context en daarbij één van de twee variabelen te maximaliseren.

> Stel: alle verkochte kaartjes zijn kinderkaartjes. Dan was de opbrengst 500 x € 5,- = € 2.500.-.
> Dat is € 2.860,- - € 2.500,- = € 360,- minder dan de werkelijke opbrengst. Het verschil wordt veroorzaakt doordat een kaartje voor volwassenen € 8,- - € 5,- = € 3,- duurder is dan een kinderkaartje.

Dan zijn er € 360,- : € 3,- = 120 kaartjes voor volwassenen verkocht. Het aantal verkochte kinderkaartjes is 500 - 120 = 380.

Ga na: 380 x € 5,- + 120 x € 8,- = € 1.900,- + € 960,- = € 2.860,-.

Je kunt natuurlijk ook beginnen met het aantal kaarten voor volwassenen te maximaliseren.

> Stel dat alle kaartjes aan volwassenen zijn verkocht, dan was de opbrengst van de kaartverkoop: 500 x € 8,- = € 4.000,-.
> Dat is € 4.000,- - € 2.860,- = € 1.140,- meer dan de werkelijke opbrengst. Het verschil wordt veroorzaakt doordat één kaartje voor volwassenen € 8,- - € 5,- = € 3,- duurder is dan één kinderkaartje. Dan zijn er € 1.140,- : € 3,- = 380 kinderkaartjes verkocht.

Voorbeeld 9 100 bossen bloemen

Een marktkoopman verkoopt bossen rozen en bossen gladiolen. Rozen € 5,- per bos, gladiolen € 4,- per bos. Hij verkoopt 100 bossen bloemen voor € 465,-.

Oplossing:

Stel dat alle verkochte bloemen bossen met rozen waren, dan was de opbrengst voor de koopman: 100 x € 5,- = € 500,-. Maar, de opbrengst is € 500,- - € 465,- = € 35,- minder. Het verschil wordt veroorzaakt doordat één bos rozen € 5,- - € 4,- = € 1,- duurder is dan een bos gladiolen. Dan zijn er € 35,- : € 1,- = 35 bossen gladiolen verkocht. Het aantal verkochte bossen rozen is 100 - 35 = 65.

Ga na: 65 x € 5,- + 35 x € 4,- = € 325,- + € 140,- = € 465,-.

De context van de kaartverkoop en die van de bloemenkoopman zijn verschillend, maar de manier van beredeneren van de oplossing is dezelfde.

Los de opgaven op door te redeneren volgens het patroon van het 'kaartverkoop probleem'.

▶ **Opgave 7** Staanplaatsen en zitplaatsen

Voor een concert worden kaarten van € 15,- voor de staanplaatsen en kaarten van € 25,- voor de zitplaatsen verkocht. In totaal wordt er 620 kaarten verkocht voor € 10.700,-.

Hoeveel staanplaatsen zijn er verkocht?

▶ **Opgave 8** Zakgeld
In groep 8 van obs Het Vierkant zitten 25 leerlingen. De meisjes krijgen gemiddeld € 4,50 zakgeld per week en de jongens krijgen gemiddeld € 4,- zakgeld per week. De leerlingen hebben uitgerekend dat zij samen € 107,- zakgeld per week krijgen.
Hoeveel meisjes zitten er in groep 8 van obs Het Vierkant?

▶ **Opgave 9** Netmeloenen en ananasmeloenen
Een marktkoopman verkoopt netmeloenen voor €1,50 en ananasmeloenen voor € 2,00. Op zaterdag verkoopt hij 300 meloenen voor € 495,-.
Hoeveel ananasmeloenen heeft hij die zaterdag verkocht?

▶ **Opgave 10** Hoe oud zijn de leerlingen van groep 7?
In groep 7 van Obs Het Vierkant zitten 25 kinderen. Er zijn kinderen van 10 jaar en kinderen van 11 jaar. De gemiddelde leeftijd van de leerlingen van groep 7 is 10,4 jaar.
Hoeveel kinderen van 11 jaar zitten er in groep 7 van Obs Het Vierkant?

▶ **Opgave 11** Appels en peren
Een marktkoopman verkoopt appels voor €1,25 per kilo en peren voor € 1,50 per kilo. Op zaterdag verkoopt hij 220 kilo appels en peren voor totaal € 294,-.
Hoeveel kilo appels heeft hij die zaterdag verkocht?

▶ **Opgave 12** Feestje!
Op een schoolfeest worden blikjes Sinas [€ 0,60 per stuk] en blikjes Cola [€ 1,- per stuk] verkocht. In totaal 145 blikjes met een opbrengst van € 103,-
Bereken hoeveel blikjes Cola er verkocht zijn.

▶ **Opgave 13** Een nieuwe fiets voor Amina
Amina heeft biljetten van € 5,- en € 10,- gespaard voor een nieuwe fiets. Zij betaalt € 720,- met precies 100 biljetten.
Hoeveel biljetten van € 5,- en hoeveel biljetten van € 10,- heeft zij gespaard?

▶ **Opgave 14** Zweten op rekenen!
Bij een rekentoets met 40 vraagstukken krijg je voor elk goed antwoord 12 punten. Voor elk fout antwoord krijg je 8 punten aftrek. Harold scoorde 260 punten.
Hoeveel vragen had Harold goed?

▶ **Opgave 15** Salarisverschillen
In een bedrijf met 225 werknemers werken vrouwen met een gemiddeld jaarsalaris van € 45.000,- en mannen met een gemiddeld jaarsalaris van € 42.000,-. Per jaar betaalt het bedrijf een bedrag van € 9.690.000,- aan salarissen.
Bereken hoeveel vrouwen er in het bedrijf werken.