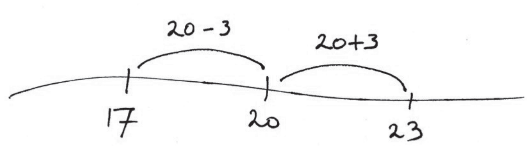
1.2.3 Handig rekenen met merkwaardige producten

Deze paragraaf 1.2.3 hoort bij het rekenboek 'Handig met getallen 1B Hs. de Kempel - Bewerkingen'. Op dit materiaal rust auteursrecht.

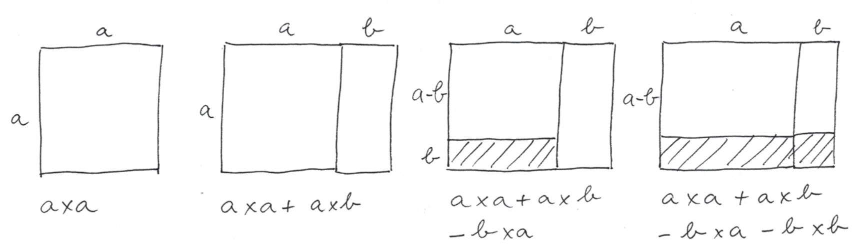
Bij het hoofdrekenen kun je gebruik maken van vermenigvuldigingen waarvan je de berekening goed kunt onthouden door de opvallende symmetrische uitwerkingen.
Drie bekende merkwaardige producten zijn:
3a. Het berekenen van het product van de som en het verschil van twee getallen, in formule: (a + b) x (a - b) of (a - b) x (a + b).
3b. Het berekenen van het kwadraat van de som van twee getallen, in formule: (a + b) x (a + b) = $(a + b)^2$.
3c. Het kwadraat van een verschil van twee getallen a en b is het kwadraat van het verschil a - b. In formule: (a - b) x (a - b) = $(a - b)^2$.

3a. Merkwaardig product 1
Het berekenen van het product van de som en het verschil van twee getallen, in formule: (a + b) x (a - b) of (a - b) x (a + b). De twee getallen zijn a en b, de som is a + b, het verschil is a - b en het product is (a - b) x (a + b). De vermenigvuldiging ‘a x a’ schrijf je ook als a^2 (spreek uit als: ‘a kwadraat’) en ‘b x b’ schrijf je ook als b^2 (spreek uit als ‘b kwadraat’).

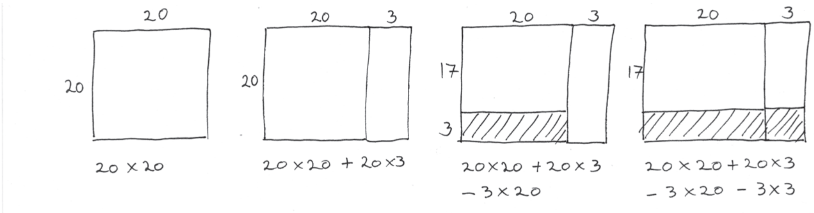
Voorbeeld 26 Uitwerking met getallen
De formule (a + b) x (a - b) of (a - b) x (a + b) kun je uitwerken met getallen.
Neem: (20 + 3) x (20 - 3) of (20 - 3) x (20 + 3). Dus: 23 x 17 of 17 x 23 is het product van de som en het verschil van 20 en 3. De getallen 17 en 23 liggen op de getallenlijn symmetrisch ten opzichte van 20.



Kies hier voor het grootste getal bij voorkeur een rond getal, bijvoorbeeld een 10-voud of een 100-voud. Bij de getallen 29 en 21 (29 x 21 of 21 x 29) kies je dan voor: (25 + 4) x (25 - 4) of (25 - 4) x (25 + 4). Je zegt: 29 x 21 of 21 x 29 is het product van de som en het verschil van 25 en 4.
Bij de getallen 62 en 38 kies je voor: (50 + 12) x (50 - 12) of (50 - 12) x (50 + 12). Je zegt: 62 x 38 of 38 x 62 is het product van de som en het verschil van 50 en 12.
Op schematisch niveau kun je de berekening van het product (a - b) x (a + b) maken met behulp van een rechthoekmodel.



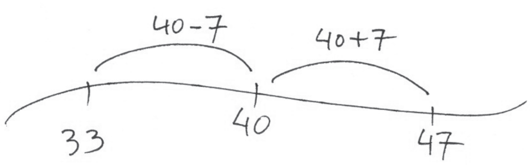
De oppervlakte van het gearceerde gedeelte is:
(a - b) x (a + b) = a x a + a x b - b x a - b x b = a x a - b x b = $a^2 - b^2$.
De formule is dus: (a - b) x (a + b) = a x a - b x b = $a^2 - b^2$.
In woorden: het product van het verschil en de som van twee getallen is gelijk aan het verschil van de kwadraten van die getallen.
Dezelfde berekening maak je met a = 20 en b = 3 met een rechthoekmodel.



17 x 23 = (20 - 3) x (20 + 3) = 20 x 20 + 20 x 3 - 3 x 20 - 3 x 3= 20 x 20 - 3 x 3.
Je kunt 17 x 23 dus berekenen door a = 20 en b = 3 te kiezen, dan bereken je:
17 x 23 = 20 x 20 - 3 x 3 = 400 - 9 = 391.

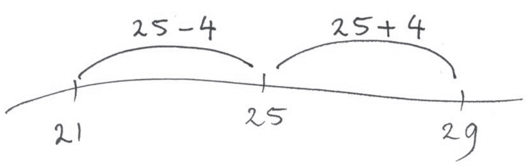
Bedenk: (a + b) x (a - b) = a^2 - b^2 kun je ook schrijven als a^2 = (a + b) x (a - b) + b^2. Deze variant op dit merkwaardige product komt goed van pas bij het berekenen van kwadraten. Bij het berekenen van 45^2 = 45 x 45 vul je 45 aan tot een tiental en kies je a = 45 en b = 5: 45^2 = 45 x 45 = (45 + 5) x (45 - 5) + 5 x 5 = 50 x 40 + 25 = 2.025.
Eindigt het getal niet op een 5, dan krijg je één 10-voud in je berekening: 37^2 = (37 + 3) x (37 - 3) + 3 x 3 = 40 x 34 + 9 = 1.360 + 9 = 1.369, of: 37^2 = (37 + 13) x (37 - 13) + 13 x 13 = 50 x 24 + 169 = 1.200 + 169 = 1.369.

Voorbeeld 27 33 x 47 =
Op de getallenlijn ligt 40 precies tussen 33 en 47.



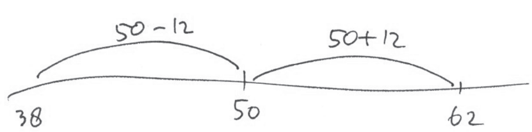
In 33 x 47 kies je a = 40 en b = 7.
Je berekent 33 x 47 = (40 - 7) x (40 + 7) = 40 x 40 - 7 x 7 = 1.600 - 49 = 1.551.

Voorbeeld 28 21 x 29 =
De getallen 21 en 29 liggen op de getallenlijn even ver van 25 af.



In 21 x 29 kies je a = 25 en b = 4.
Je berekent 21 x 29 = (25 - 4) x (25 + 4) = 25 x 25 - 4 x 4 = 625 - 16 = 609.

Voorbeeld 29 38 x 62 =
De getallen 38 en 62 liggen op de getallenlijn symmetrisch ten opzichte van 50.



Je berekent: 38 x 62 = (50 - 12) x (50 + 12) = 50 x 50 - 12 x 12 = 2.500 - 144 = 2.356.

Bij deze berekeningen gebruik je veel kwadraten. Daarom is het praktisch om de kwadraten van de getallen 1 tot en met 20, van de tienvouden tot 100 en van de getallen 15, 25, 35, ...95 uit je hoofd te leren.

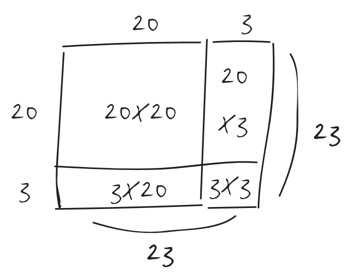
▶ **Opgave 14** Kwadraten
Bereken de kwadraten van deze getallen en probeer ze te onthouden.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
5	15	25	35	45	55	65	75	85	95

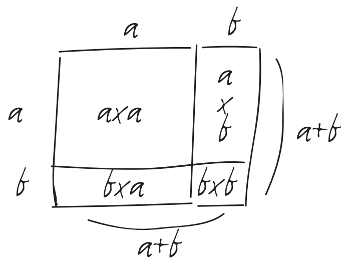
▶ **Opgave 15** Hoofdrekenen op papier met het product van som en verschil
Maak de berekening met gebruik van het merkwaardige product (a - b) x (a + b) = a x a - b x b.

a.	19 x 21 =	f.	72 x 78 =	k.	56 x 84 =	p.	28 x 32 =
b.	28 x 32 =	g.	19 x 41 =	l.	83 x 87 =	q.	25 x 75 =
c.	56 x 64 =	h.	45 x 75 =	m.	7 x 13 =	r.	17 x 43 =
d.	11 x 19 =	i.	27 x 53 =	n.	39 x 61 =	s.	55 x 65 =
e.	33 x 37 =	j.	35 x 45 =	o.	12 x 18 =	t.	34 x 36 =

3b. Merkwaardig product 2
Het berekenen van het kwadraat van de som van twee getallen, in formule: $(a + b) \times (a + b) = (a + b)^2$.
De getallen zijn a en b, a + b is de som van de getallen en (a + b) x (a + b) is het kwadraat van de som a + b.
Voorbeeld 30 Uitwerking met getallen
De formule $(a + b) \times (a + b) = (a + b)^2$ kun je uitwerken in $23^2 = 23 \times 23 = (20 + 3) \times (20 + 3)$ en op schematisch niveau weergeven in een rechthoekmodel.



De oppervlakte van het vierkant met zijde 20 + 3 = 23 is: $(20 + 3) \times (20 + 3) = 20 \times 20 + 20 \times 3 + 3 \times 20 + 3 \times 3 = 20 \times 20 + 2 \times 3 \times 20 + 3 \times 3$. Kort genoteerd: $(20 + 3)^2 = 20^2 + 2 \times 3 \times 20 + 3^2$.
Je kunt de formule $(a + b) \times (a + b) = (a + b)^2$ berekenen in een rechthoekmodel.

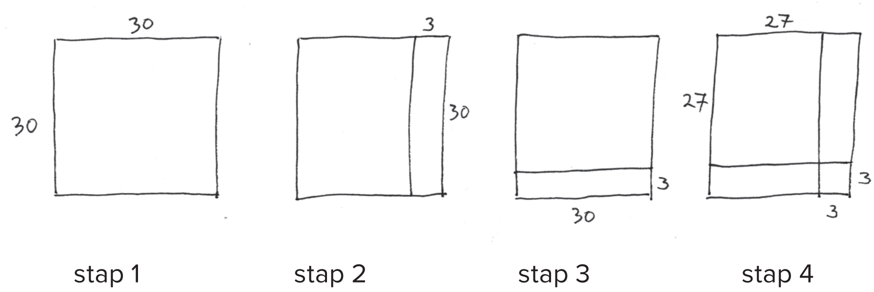


Met andere woorden: (a + b) x (a + b) = a x a + a x b + b x a + b x b = a x a + 2 x a x b + b x b.
Kort genoteerd: $(a + b)^2 = a^2 + 2 \times a \times b + b^2$.
In woorden: het kwadraat van een som is gelijk aan de som van de kwadraten van beide getallen en het dubbele product van de getallen.

Voorbeeld 31 $35^2 = (30 + 5)^2 =$
Je berekent $35^2 = (30 + 5)^2 = 30 \times 30 + 2 \times 30 \times 5 + 5 \times 5 = 900 + 300 + 25 = 1.225$.
Kies voor a een rond getal, bij voorkeur een 10-voud, een 100-voud of een getal met een bekend kwadraat:
$28^2 = (20 + 8)^2 = (20 + 8) \times (20 + 8) = 20 \times 20 + 2 \times 20 \times 8 + 8 \times 8 = 400 + 320 + 64 = 784$,
of:
$28^2 = (25 + 3)^2 = (25 + 3) \times (25 + 3) = 25 \times 25 + 2 \times 25 \times 3 + 3 \times 3 = 625 + 150 + 9 = 784$.

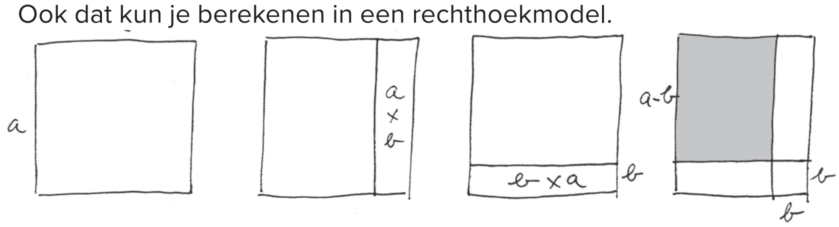
3c. Merkwaardig product 3
Het kwadraat van een verschil van twee getallen a en b is het kwadraat van het verschil a - b. In formule: $(a - b) \times (a - b) = (a - b)^2$.

Voorbeeld 32 Uitwerking met getallen
De formule $(a - b) \times (a - b) = (a - b)^2$ uitgewerkt in een getallenvoorbeeld.
Je berekent $27^2 = 27 \times 27 = (30 - 3) \times (30 - 3)$ op schematisch niveau in een rechthoekmodel.



- Stap 1: een vierkant met oppervlakte 30 x 30 = 900.
- Stap 2: een strook van 30 x 3 eraf, dus 900 - 90 = 810.
- Stap 3: een strook van 3 x 30 eraf, dus 810 - 90 = 720. Maar, kan dat wel?
- Stap 4: Wat is er over? Een vierkant van 27 x 27, maar het stukje rechtsonder van 3 x 3 heb je er twee keer afgehaald. Je moet een keer 3 x 3 bij de uitkomst optellen: 720 + 9 = 729.

Met andere woorden: 27 x 27 = 30 x 30 - 30 x 3 - 3 x 30 + 3 x 3 = 30 x 30 - 2 x 3 x 30 + 3 x 3.
Kort genoteerd: $(30 - 3)^2 = 30^2 - 2 \times 3 \times 30 + 3^2$.
In formule: $(a - b) \times (a - b) = (a - b)^2$.
Ook dat kun je berekenen in een rechthoekmodel.



$(a - b) \times (a - b) = (a - b)^2$,

De oppervlakte van het gearceerde gedeelte is:
$(a - b)^2 = (a - b) \times (a - b) = a \times a - a \times b - b \times a + b \times b = a \times a - 2 \times a \times b + b \times b$.
Kort genoteerd: $(a - b)^2 = a^2 - 2 \times a \times b + b^2$.
In woorden: het kwadraat van een verschil is gelijk aan de som van de kwadraten van beide getallen verminderd met het dubbele product van de getallen.

Voorbeeld 33 Rekenvoorbeelden
Nog een aantal uitgewerkte voorbeelden:
$36^2 = (40 - 4)^2 = (40 - 4) \times (40 - 4) = 40 \times 40 - 2 \times 4 \times 40 + 4 \times 4 = 1.600 - 320 + 16 = 1.296$.
Kies voor a een rond getal, bij voorkeur een 10-voud of een 100-voud:
$43^2 = (50 - 7)^2 = 50 \times 50 - 2 \times 50 \times 7 + 7 \times 7 = 2.500 - 700 + 49 = 1.849$
$85^2 = (90 - 5)^2 = 90 \times 90 - 2 \times 5 \times 90 + 5 \times 5 = 8.100 - 900 + 25 = 7.225$

Je oefent deze merkwaardige producten in opgave 16 en 17.
▶ **Opgave 16** Het kwadraat van een som of een verschil
Bereken deze opgaven. Gebruik de merkwaardige producten $(a + b)^2$ en $(a - b)^2$.

a.	$13^2 =$	d.	$38^2 =$	g.	$74^2 =$	j.	$103^2 =$
b.	$17^2 =$	e.	$49^2 =$	h.	$77^2 =$		
c.	$32^2 =$	f.	$51^2 =$	i.	$99^2 =$		

▶ **Opgave 17** Gevarieerde opgaven
Bereken deze opgaven. Gebruik de merkwaardige producten $(a + b) \times (a - b)$, $(a + b)^2$ of $(a - b)^2$.

a.	$43^2 - 33^2 =$	d.	$\frac{51^2 - 31^2}{51 - 31} =$	g.	$109^2 =$
b.	$\frac{35^2 - 25^2}{35 - 25} =$	e.	$38 \times 42 - 32 \times 48 =$	h.	$\frac{69^2 - 47^2}{22} =$
c.	$125^2 =$	f.	$73^2 - 37^2 =$	i.	$\frac{37^2 - 27^2}{64} =$